Università di Salerno
Dipartimento di Ingegneria Industriale

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI SALERNO

ESERCITAZIONE

Fondamenti di Informatica

Modelli Matematici e Calcolo Numerico

Prof. Christian Esposito

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica e Gestionale (Classe I)

A.A. 2017/18

MATLAB

Esercizio Modelli Matematici - 1 (1)

La strumentazione biomedicale è un settore importante dell'ingegneria. Queste apparecchiature sono utilizzate per misurare varie grandezze, come la temperatura corporea, il livello di ossigeno nel sangue, le pulsazioni cardiache e così via. Gli ingegneri che progettano questo genere di strumentazione spesso hanno bisogno della cosiddeta *curva di risposta* che descrive la rapidità con la quale uno strumento fornisce la misura di una grandezza.

La teoria indica che, di solito, la risposta di uno strumento può essere descritta da una delle seguenti equazioni, dove v è la tensione di uscita (output) e t è il tempo. In entrambi i modelli, la tensione raggiunge un valore costante di regime quando $t \to \infty$; T rappresenta il tempo richiesto affinché la tensione raggiunga il 95% del valore di regime.

$v(t) = a_1 + a_2 e^{-3t/T}$ (modello di primo grado)

$v(t) = a_1 + a_2 e^{-3t/T} + a_3 t e^{-3t/T}$ (modello di secondo grado)

Esercizio Modelli Matematici - 1 (2)

I seguenti dati forniscono la tensione di output di uno strumento in funzione del tempo. Ottenere una funzione che descrive questi dati.

t (sec)	0	0,3	0,8	1,1	1,6	2,3	3
v (volt)	0	0,6	1,28	1,5	1,7	1,75	1,8

Esercizio Modelli Matematici - 1 (2)

I seguenti dati forniscono la tensione di output di uno strumento in funzione del tempo. Ottenere una funzione che descrive questi dati.

t (sec)	0	0,3	0,8	1,1	1,6	2,3	3
v (volt)	0	0,6	1,28	1,5	1,7	1,75	1,8

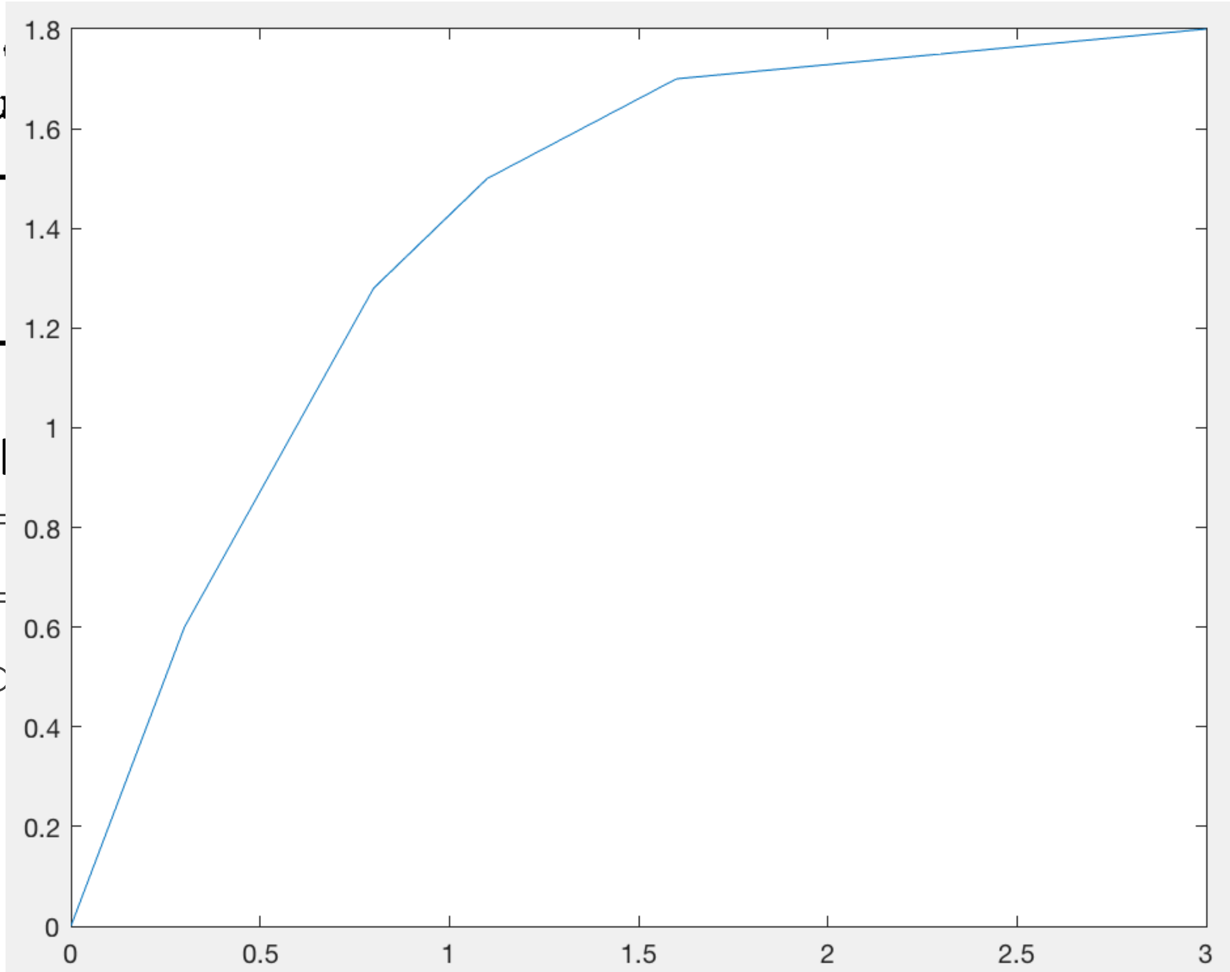
a. **Rappresentare i dati in un diagramma xy**

```
>> t = [0, 0.3, 0.8, 1.1, 1.6, 2.3, 3];
>> v = [0, 0.6, 1.28, 1.5, 1.7, 1.75, 1.8];
>> plot(t, v)
```

Esercizio Modelli Matematici - 1 (2)

I seguenti … del tempo.
Ottenere u…

t (sec)	…	3
v (volt)	…	1,8



a. **Rapp…**

```
>> t = …
>> v = … ;
>> plo…
```

Esercizio Modelli Matematici - 1 (2)

I seguenti dati forniscono la tensione di output di uno strumento in funzione del tempo. Ottenere una funzione che descrive questi dati.

t (sec)	0	0,3	0,8	1,1	1,6	2,3	3
v (volt)	0	0,6	1,28	1,5	1,7	1,75	1,8

a. **Rappresentare i dati in un diagramma xy**

```
>> t = [0, 0.3, 0.8, 1.1, 1.6, 2.3, 3];
>> v = [0, 0.6, 1.28, 1.5, 1.7, 1.75, 1.8];
>> plot(t, v)
```

Notiamo che occorrono 3 secondi affinchè la tenzione si stabilizzi. Quindi possiamo assumere che T = 3.

Esercizio Modelli Matematici - 1 (3)

b. **Modello Matematico**

Consideriamo il primo modello matematico nella forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & e^{-t_1} \\ 1 & e^{-t_2} \\ \cdots & \cdots \\ 1 & e^{-t_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

```
>> MatCoef = [ones(size(t)); exp(-t)]';
>> a = MatCoef \v’
a =     2.0258   -1.9307
```

Esercizio Modelli Matematici - 1 (3)

b. Modello Matematico

Analogamente per il secondo modello matematico:

$$\begin{bmatrix} 1 & e^{-t_1} & t_1 e^{-t_1} \\ 1 & e^{-t_2} & t_2 e^{-t_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & e^{-t_n} & t_n e^{-t_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

```
>> MatCoef = [ones(size(t)); exp(-t); t.*exp(-t)]';
>> a = MatCoef\v’
a =     1.7496   -1.7682    0.8885
```

Esercizio Modelli Matematici - 1 (4)

c. Scelta del Modello Matematico

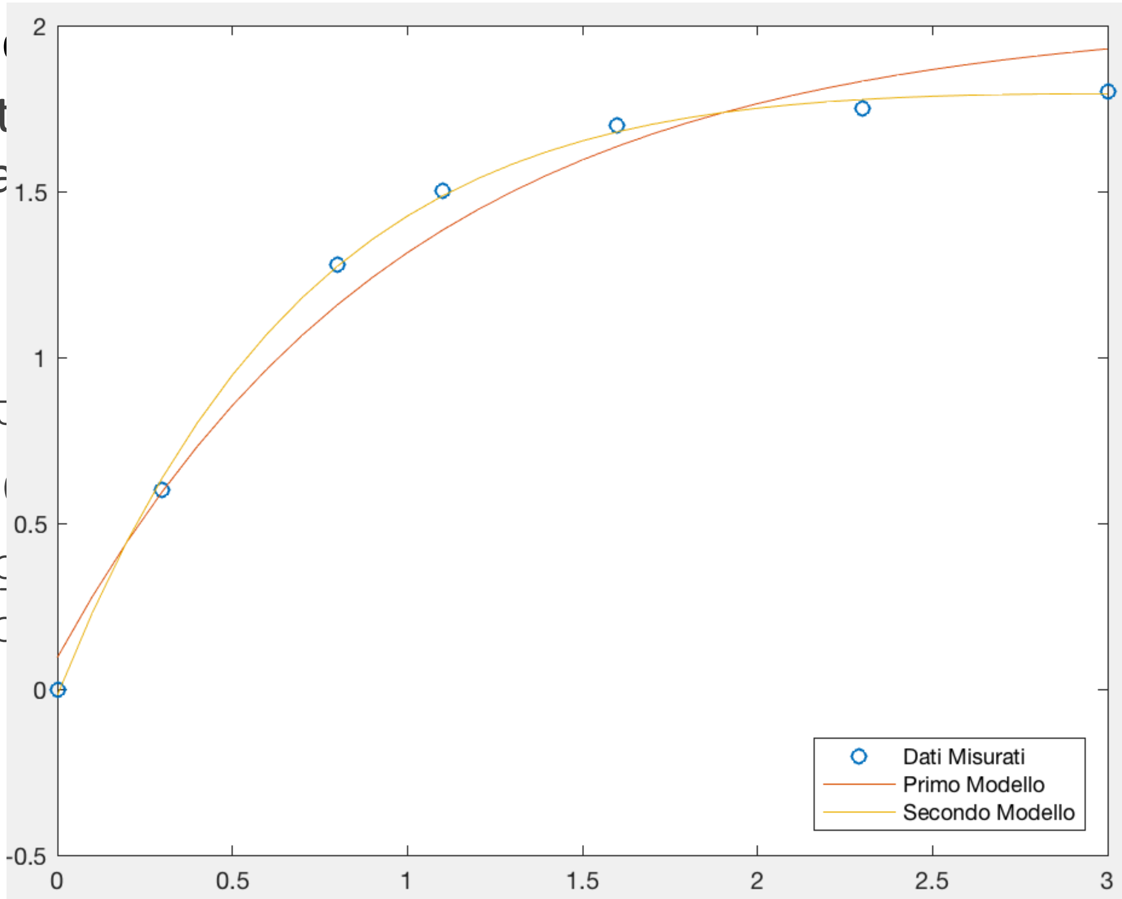
Rappresentiamo su un diagramma xy i due modelli e vediamo quello che approssima meglio i dati:

```
>> y1 = x2(1)+(x2(2)*exp(-t_test));
>> y2 = x1(1)+(x1(2)*exp(-t_test))+x1(3)*(t_test.*
exp(-t_test));
>> plot(t,v,'o', t_test, y1, t_test, y2)
>> legend('Dati Misurati', 'Primo Modello',
'Secondo Modello')
```

Esercizio Modelli Matematici - 1 (4)

c. Scelta (

Rappresent amo quello che approssima




```
>> y1 =
>> y2 =                    (t_test.*
exp(-t_t
>> plot(
>>    leg                    Modello',
'Secondo
```

Esercizio Modelli Matematici - 1 (4)

c. Scelta del Modello Matematico

Rappresentiamo su un diagramma xy i due modelli e vediamo quello che approssima meglio i dati:

```
>> y1 = x2(1)+(x2(2)*exp(-t_test));
>> y2 = x1(1)+(x1(2)*exp(-t_test))+x1(3)*(t_test.*
exp(-t_test));
>> plot(t,v,'o', t_test, y1, t_test, y2)
>> legend('Dati Misurati', 'Primo Modello',
'Secondo Modello')
```

Dal diagramma si evince che il secondo modello approssima meglio i dati.

Esercizio Modelli Matematici - 1 (5)

d. Analisi Residui

Determiniamo i residui per i due modelli:

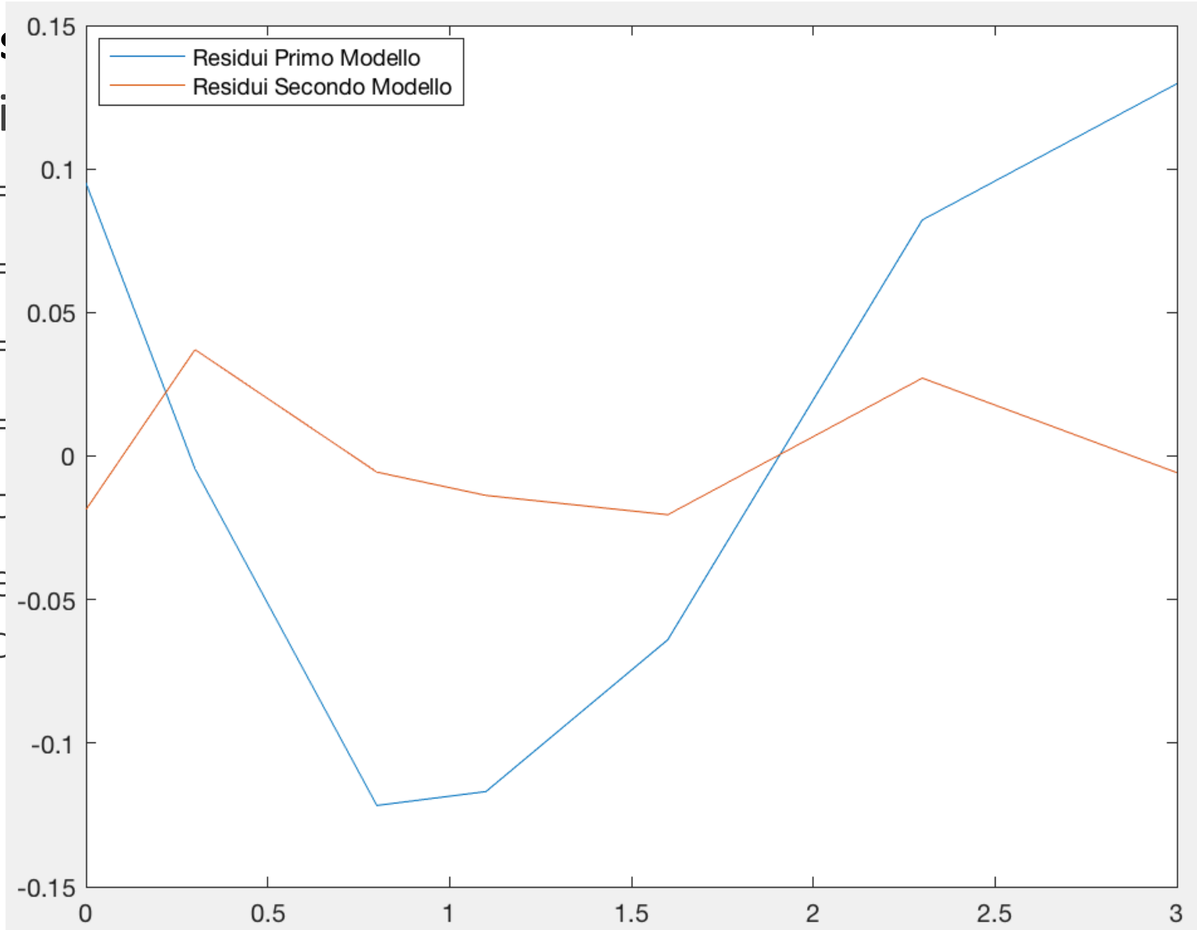
```
>> y1 = x2(1)+(x2(2)*exp(-t));
>> y2 = x1(1)+(x1(2)*exp(-t))+x1(3)*(t.*exp(-t));
>> r1 = y1 - v;
>> r2 = y2 - v;
>> plot (t, r1, t, r2)
>> legend('Residui Primo Modello', 'Residui Secondo
Modello’)
```

Esercizio Modelli Matematici - 1 (5)

d. Anali

Determini

```
>> y1 =
>> y2 =                                     p(-t));
>> r1 =
>> r2 =
>> plot
>> lege                                     i Secondo
Modello
```



Esercizio Modelli Matematici - 2 (1)

Il seguente prospetto riporta i valori della popolazione di una nazione.

Anno	1990	1991	1992	1993	1994	1995
Popolazione (milioni)	10	10,8	11,7	12,7	13,8	14,9

Trovare una funzione che descrive questi dati. Rappresentare la funzione e i dati nello stesso diagramma. Quando la popolazione raddoppierà il valore del 1990?

Esercizio Modelli Matematici - 2 (2)

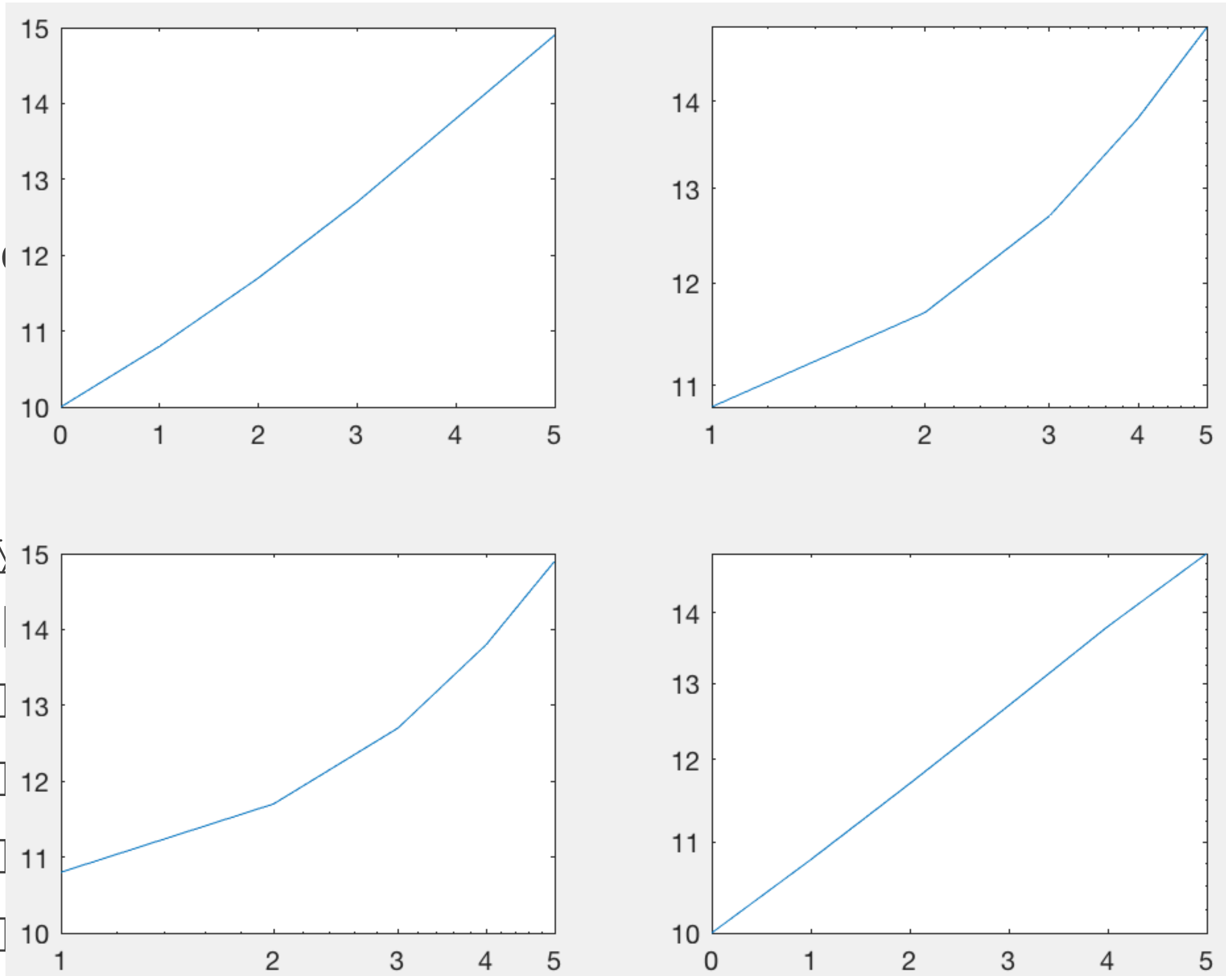
Soluzione

Scaliamo i dati dell’anno sottraendo 1990 così da evitare di dover gestire numeri molto grandi. Rappresentiamo i dati nei vari diagrammi lineari, logaritmici e semilogaritmici per vedere l’andamento:

```
>> year = [1990:1995];
>> x = year-1990;
>> pop=[10,10.8,11.7,12.7,13.8,14.9];
>> subplot(2,2,1); plot(x, pop);
>> subplot(2,2,2); loglog(x, pop)
>> subplot(2,2,3); semilogx(x, pop)
>> subplot(2,2,4); semilogy(x, pop)
```

Esercizio Modelli Matematici - 2 (2)

Soluzione



Scaliamo i … ver gestire numeri m… mi lineari, logaritmici …

```
>> year
>> x = y
>> pop=
>> subpl
>> subpl
>> subpl
>> subpl
```

Esercizio Modelli Matematici - 2 (3)

Siccome il diagramma semilogaritmico a y è quello che presenta una retta in maniera più marcata allora il modello matematico che meglio descrive i dati è $y = b(10)^{mx}$:

```
>> p=polyfit(x,log10(pop),1)
p =     0.0349     0.9992
>> m=p(1)
m = 0.0349
>> b=10^p(2)
b =     9.9817
```

Quindi la funzione esponenziale è $y = 9{,}9817(10)^{0{,}0349x}$.

Esercizio Modelli Matematici - 2 (4)

Se poniamo y = 20, per determinare in quanto tempo la popolazione aumenterà da 10 a 20 milioni, si ha che $20 = 9{,}9817(10)^{0{,}0349x}$. risolviamo questa uguaglianza per x: $x = (\log(20) - \log(9{,}9817))/0{,}0349$. In Matlab ciò si calcola come segue:

```
>> (log10(20)-log10(9.9817))/.0349
ans =    8.6483
```

La risposta è 8,6483 anni dopo il 1990.

Esercizio Modelli Matematici - 3

L'allungamento di una molla è funzione della forza di trazione che viene applicata. La seguente tabella fornisce la lunghezza y di una particolare molla che è sottoposta alla forza f. La *lunghezza libera* (senza forza applicata) della molla è 120 mm. Trovare una relazione tra la forza f e l'allungamento x rispetto alla lunghezza libera della molla ($x = y - 120$).

Forza f (N)	**Lunghezza della molla y (mm)**
0	120
0,47	183
1,15	269
1,64	328

Esercizio Modelli Matematici - 4

La *tempera* è un trattamento termico che consiste nell'immergere un metallo caldo in un liquido per un determinato periodo di tempo al fine di migliorare alcune proprietà, come la durezza. Una sfera di rame di diametro 25 mm, inizialmente a 300 °C, viene immersa in un liquido a 0 °C. Il seguente prospetto elenca le misure della temperatura della sfera in funzione del tempo. Trovare una funzione che descrive questi dati. Rappresentare la funzione e i dati nello stesso diagramma.

Tempo (sec)	0	1	2	3	4	5	6
Temperatura (°C)	300	150	75	35	12	5	2

Esercizio Modelli Matematici - 5

La vita utile del cuscinetto di una macchina dipende dalla temperatura di funzionamento, come dimostrano i dati successivi. Trovare una funzione che descrive questi dati. Rappresentare la funzione e i dati nello stesso diagramma. Stimare la vita del cuscinetto se funziona a 55 °C.

Temperatura (°C)	30	40	50	60	70	80	90
Vita del cuscinetto (10^3 ore)	28	21	15	11	8	6	4

Esercizio Modelli Matematici - 6

Un circuito elettrico è formato da un resistore e da un condensatore. Il condensatore è inizialmente caricato a 100 volt. Quando l'alimentazione viene staccata, la tensione del condensatore diminuisce con il tempo, come dimostrano i dati successivi. Trovare la funzione che mette in relazione la tensione v del condensatore con il tempo t. Rappresentare la funzione e i dati nello stesso diagramma.

Tempo (sec)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
Tensione (volt)	100	62	38	21	13	7	4	3	2

Esercizio Sistemi di Equazioni - 1

Applicare il metodo della divisione a sinistra per risolvere i seguenti sistemi. Controllare le soluzioni calcolando **Ax**.

a) $2x + y = 5$

$3x - 9y = 2$

b) $-8x - 5y = 4$

$-2x + 7y = 10$

c) $12x - 5y = 11$

$-3x + 4y + 7z = -3$

$6x + 2y + 3z = 22$

d) $6x - 3y + 4z = 41$

$12x + 5y - 7z = -26$

$-5x + 2y + 6z = 14$

Esercizio Sistemi di Equazioni - 2

Utilizzare Matlab per risolvere i seguenti sistemi:

a) $-2x + y = -5$

$-2x + y = 3$

b) $-2x + y = 3$

$-8x + 4y = 12$

c) $-2x + y = -5$

$-2x + y = -5.00001$

d) $x_1 + 5x_2 - x_3 + 6x_4 = 19$

$2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 7$

$-x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 20$

$3x_1 - 7x_2 - 2x_3 + x_4 = -75$

Esercizio Sistemi di Equazioni – 3

Utilizzare Matlab per risolvere il seguente sistema:

$$x - 3y = 2$$

$$x + 5y = 18$$

$$4x - 6y = 20$$

Utilizzare Matlab per risolvere il seguente sistema:

$$x - 3y = 2$$

$$x + 5y = 18$$

$$4x - 6y = 10$$

Impiegare il metodo della matrice inversa e della determinazione dell’esistenza ed unicità delle soluzioni.

Esercizio Calcolo Numerico – 1 (1)

La distanza totale D percorsa da un oggetto che si muove alla velocità $v(t)$ dall'istante $t = a$ all'istante $t = b$, è data da

$$\int_a^b \left| v(t) \right| dt$$

Il valore assoluto $|v(t)|$ serve a tenere conto dell'eventualità che la velocità possa essere negativa. Supponendo che un oggetto si sposti alla velocità $v(t) = \cos(\pi t)$ per $0 \leq t \leq 1$. Determinare la distanza totale percorsa e la posizione dell'oggetto $x(1)$ nell'istante $t = 1$, se $x(0) = 2$.

Esercizio Calcolo Numerico – 1 (2)

Soluzione

Risolviamo l'integrale in maniera analitica:

$$D(1) = \int_0^1 |\cos\ \pi t|\ dt = \int_0^{1/2} \cos\ \pi t\, dt + \int_{1/2}^1 - \cos\ \pi t\, dt$$

o

$$D(1) = 2\int_0^{1/2} \cos\ \pi t\, dt = 2\,\frac{\sin pit}{\pi}\Big|_0^{1/2} = \frac{2}{\pi}\left(\sin\ \frac{\pi}{2} - \sin\ 0\right) = \frac{2}{\pi}$$

Pertanto:

$$x(1) = \int_0^1 v(t)\, dt + x(0) = \int_0^1 \cos\ \pi t\, dt + 2 = \frac{\sin\ \pi t}{\pi}\Big|_0^2 + 2 = 2$$

Esercizio Calcolo Numerico – 1 (2)

Vediamo come risolvere il tutto in MATLAB:

```
>> x = quad('cos(pi*x)',0,1)+2
x =      2
```

Esercizio Calcolo Numerico – 2 (1)

Un oggetto parte con una velocità iniziale di 3 m/sec nell'istante $t = 0$ e subisce un'accelerazione $a(t)$ di 5 m/sec^2. Rappresentate il diagramma della velocità in funzione del tempo per $0 \leq t \leq 5$ e determinate la distanza totale che l'oggetto ha percorso in 5 secondi.

Esercizio Calcolo Numerico – 2 (1)

Un oggetto parte con una velocità iniziale di 3 m/sec nell'istante $t = 0$ e subisce un'accelerazione $a(t)$ di 5 m/sec^2. Rappresentate il diagramma della velocità in funzione del tempo per $0 \le t \le 5$ e determinate la distanza totale che l'oggetto ha percorso in 5 secondi.

Soluzione

La soluzione è quella di integrare due volte la funzione di accelerazione. Procediamo con la prima integrazione per ottenere la velocità:

$$v(t) = \int_0^t a(t)\,dt + v(0) = \int_0^t 5t\,dt + 3 = \left.\frac{5t^2}{2}\right|_0^t + 3 = \frac{5t^2}{2} + 3$$

E poi la successiva per la distanza:

$$D = \int_0^5 \left(\frac{5t^2}{2} + 3\right) dt = \left.\left(\frac{5}{2}\frac{t^3}{3} + 3t\right)\right|_{t=5} = 119.1667$$

Esercizio Calcolo Numerico – 2 (2)

Vediamo come risolvere il tutto in MATLAB:

```
v := int(5*t, t=0..t)+3
```

$$\frac{5\,t^2}{2} + 3$$

```
d := int(v, t=0..5)
```

$$\frac{715}{6}$$

```
>> 715/6ans =  119.1667
```

Esercizio Calcolo Numerico - 3

La posizione di un oggetto è una funzione del tempo data da $x(t) = 6t \sin(5t)$. Rappresentate la velocità e l'accelerazione dell'oggetto in funzione del tempo per $0 \leq t \leq 5$.

Esercizio Calcolo Numerico - 3

La posizione di un oggetto è una funzione del tempo data da $x(t) = 6t\ \sin(5t)$. Rappresentate la velocità e l'accelerazione dell'oggetto in funzione del tempo per $0 \le t \le 5$.

Soluzione

```
x := 6*t*sin(5*t)
```

$$6\, t \sin(5\, t)$$

```
v := diff(x, t)
```

$$6 \sin(5\, t) + 30\, t \cos(5\, t)$$

```
a := diff(v, t)
```

$$60 \cos(5\, t) - 150\, t \sin(5\, t)$$

Esercizio Calcolo Numerico - 4

Una palla viene lanciata verticalmente con una velocità $v(0)$ metri/sec. La sua altezza dal suolo è una funzione del tempo espressa dalla seguente equazione $h(t) = 6t - 4.9t^2$ metri. Determinare la velocità iniziale della palla.

Esercizio Calcolo Numerico - 5

Un oggetto si sposta con velocità $v(t)$, i cui valori sono riportati nella tabella successiva. Determinate la posizione dell'oggetto $x(t)$ per $t = 10$ sec, se $x(0) = 3$.

Tempo (sec)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Velocità (m/sec)	0	2	5	7	9	12	15	18	22	20	17

Esercizio Calcolo Numerico - 6

Un serbatoio d'acqua ha delle pareti verticali e un'area di base di 100 ft^2. Per riempire il serbatoio, l'acqua viene pompata dall'alto alle velocità indicate nel seguente prospetto. Determinate il livello dell'acqua $h(t)$ nell'istante $t = 10$ minuti.

Tempo (min)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Velocità di efflusso (ft^3/min)	0	80	130	150	150	160	165	170	160	140	120